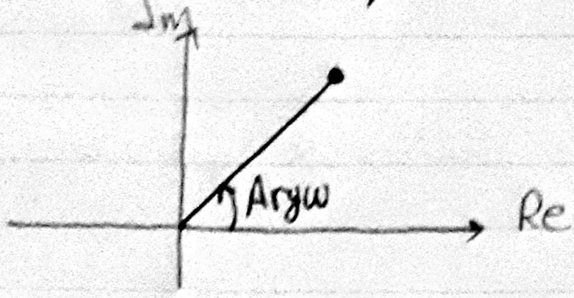
Μάθημα 5ο 08/03/2018

## Μικρή Επανάληψη

Επίλυση της $z^n = w$, $n \in \mathbb{N}$, $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\} = \mathbb{C}^*$

$w = re^{i\theta} = |w| e^{i \arg w}$, $\arg w := \underbrace{\mathrm{Arg}\, w}_{\in(-\pi,\pi)} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$




⇒ οι λύσεις της εξίσωσης $z^n = w$ είναι οι

$z_k = r^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}}$, $k = 0, 1, \dots, n-1$

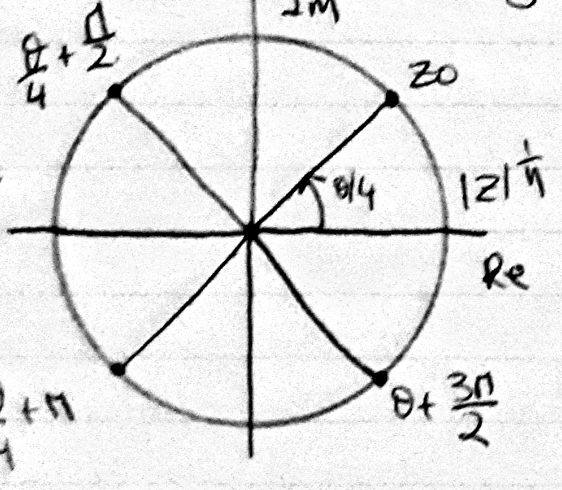
$z_k = |w|^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\mathrm{Arg}\, w + 2k\pi}{n}}$, $k = 0, 1, \dots, n-1$

Γεωμετρική Παράσταση των $z_k$

α) Είναι οι "n" κορυφές κανονικού πολυγώνου

β) διαμερίζουν το κύκλο κέντρου O και ακτίνας $|z|^{\frac{1}{n}}$ σε "n" ίσα τόξα μήκους $\frac{2\pi}{n}$

n=4




με $\theta = \mathrm{Arg}\, z$

(mod 2π)

Αυτό ισχύει και ειδικότερα για τις ρίζες της μονάδας $z^n = 1$, $n \in \mathbb{N}$ έχει τις "n" λύσεις (n ρίζες)

$$S_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

(ειδική περίπτωση της προηγούμενης για $w = 1 = 1 + 0i = |1| e^{i\underbrace{\mathrm{Arg}\,1}_{=0}}$)

## ΟΡΙΣΜΟΣ

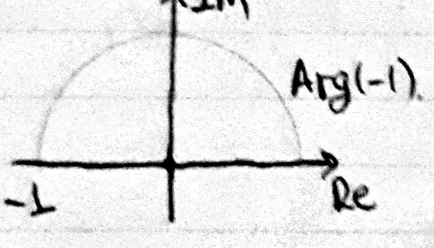
Έστω $n \in \mathbb{N}$, τότε ορίζουμε την συνάρτηση της n-οστής ρίζας:

$$\sqrt[n]{\cdot} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \quad \mu \quad \sqrt[n]{z} = |z|^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\mathrm{Arg}\,z}{n}}$$

με $\mathrm{Arg}\,0 = 0$ (σύμβαση)

**Π.χ.** $\sqrt[3]{-1}$ Από τον ορισμό πάντα στη μιγαδική ανάλυση θα καταλαβαίνουμε το εξής:

$$\sqrt[3]{-1} = \underbrace{\underbrace{|-1|}_{=1}^{\frac{1}{3}}}_{=1} e^{i\frac{\mathrm{Arg}(-1)}{3}} = e^{i\frac{\pi}{3}} = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} =$$




$$= \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Θυμάμαι: $\cos\pi/6 = \sqrt{3}/2$

$\sin\pi/6 = 1/2$

$\cos\pi/4 = \sqrt{2}/2 = \sin\pi/4$

Άρα: $\sqrt[3]{-1} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

Παρατήρηση

Όπως ξέρουμε και $(-1)^3=-1$, δηλαδή και το $-1$ επιλύει την $z^3=-1$ και πράγματι, οι ρίζες της $z^3=-1$ είναι οι:

$$z_k = |-1|^{\frac{1}{3}} e^{i\frac{Arg(-1)+2k\pi}{n}}, \quad k=0,1,\ldots$$

$$= \underbrace{e^{i\frac{\pi}{3}}}_{z_0}, \underbrace{e^{i\left(\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi}{3}\right)}}_{z_1}, \underbrace{e^{i\left(\frac{\pi}{3}+\frac{4\pi}{3}\right)}}_{z_2}$$

$$= \sqrt[3]{-1} \qquad = e^{i\pi} = -1$$

Αποδεικνύεται ότι η $\sqrt[n]{\cdot} : \mathbb{C} \to \Gamma := \{w\in\mathbb{C} : -\frac{\pi}{n} < Arg\,w \le \frac{\pi}{n}\}$ είναι 1-1 και επί (δηλ. $\sqrt[n]{\mathbb{C}} = \Gamma$) με αντίστροφη συνάρτηση τη $\cdot^n : \Gamma : \mathbb{C}$

(δηλ. αν $w = \sqrt[n]{z} \underset{w\in\Gamma}{\Leftrightarrow} z = w^n$

Αποδ.

Χρησιμοποιούμε το εξής: $f: X \to Y$ όπου είναι 1-1 και επί $\Leftrightarrow \exists g: Y \to X : f\circ g = id_Y$ και $g\circ f = id_X$

Πρώτα, ας δείξουμε ποιό είναι το σύνολο τιμών της $\sqrt[n]{\cdot} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ $\forall z\in\mathbb{C} : \sqrt[n]{z} := |z|^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{Arg\,z}{n}} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{Arg\,z}{n}}_{Arg\sqrt[n]{z}} \in \left(-\frac{\pi}{n}, \frac{\pi}{n}\right) \subset (-\pi, \pi).$$

$\forall z \in \mathbb{C} \quad \underbrace{\sqrt[n]{z}}_{=w} := \underbrace{|z|^{\frac{1}{n}}}_{|\sqrt[n]{z}|} e^{i\frac{Arg z}{n}}$

Άρα, αφού $\forall z \in \mathbb{C}$ η εικόνα του (υπό την $\sqrt[n]{\cdot}$) $\sqrt[n]{z}$ έχει $Arg\sqrt[n]{z} \in \left(-\frac{\pi}{n}, \frac{\pi}{n}\right)$

έχουμε $\sqrt[n]{\mathbb{C}} \subset \{w \in \mathbb{C} : -\frac{\pi}{n} < Arg w \leq \frac{\pi}{n}\} := \Gamma$

και για $w \in \Gamma$, $w = |w| e^{i Arg w}$ θέλουμε

$z = w^n = |w|^n e^{i n Arg w}$ για το οποίο ισχύει

$\sqrt[n]{z} = (|w|^n)^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{n Arg w}{n}} = |w| e^{i Arg w} = w$

$\Rightarrow \sqrt[n]{\mathbb{C}} = \Gamma$ και με το "χρησιμοποιούμε..."

έχουμε $f = \sqrt[n]{\cdot} : \mathbb{C} \longrightarrow \Gamma$, $w = \sqrt[n]{z}$

$g = \cdot^n : \Gamma \longrightarrow \mathbb{C}$, $z = w^n$

Άρα έχω:

$(g \circ f)(z) = (\sqrt[n]{z})^n \underset{op.}{=} \left(|z|^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{Arg z}{n}}\right)^n = |z| e^{i Arg z} := z$

αντίστοιχα $(f \circ g)(w) = \ldots = w$ για $w \in \Gamma$

<u>ΥΠΕΝΘΥΜΙΣΗ</u>

$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \; \exists! \, (r, \varphi) \in (0, +\infty) \times (-\pi, \pi]$ με $z = re^{i\varphi}$ και ονομάζουμε το $r := |z|$ και το $\phi := Arg z$

<u>Ασκήσεις για το σπίτι</u>

1) Βρες όλες τις λύσεις της $z^4 = i$

2) —"— της $az^2 + bz + c = 0$, $a, b, c$ εν $\mathbb{C}$, $a \neq 0$

3) $z^2 = 1$.

Λογαριθμική Συνάρτηση και η Εξίσωση $e^z = w$

Είδαμε ότι $e^z = e^{\underset{x}{Rez} + i\underset{y}{Imz}} = e^{Rez} \cdot e^{iImz} =$

$= e^{Rez}(\cos Imz + i\sin Imz) \Rightarrow |e^z| = \underset{>0}{e^{Rez}} \underbrace{|e^{iImz}|}_{=1} > 0$

$\Rightarrow$ για να έχει λύση η $e^z = w$ πρέπει το $w \in \mathbb{C}^*$
Άρα, έστω $w \in \mathbb{C}^*$, τότε γράφεται με μοναδικό τρόπο

$w = |w|e^{iArgw} = e^{\log|w|} e^{iArgw} = e^z$

$\overset{(*)}{\Longrightarrow} z = \log|w| + i(Argw + 2\kappa\pi),\ \kappa \in \mathbb{Z}$

(*) Αυτό προκύπτει από το ότι αν έχουμε $e^{z_1} = e^{z_2} \Rightarrow$
$\Rightarrow z_1 = z_2 + 2\kappa\pi,\ \kappa \in \mathbb{Z}$ (γιατί; άσκηση επιπ)

ΟΡΙΣΜΟΣ

Η συνάρτηση $\log : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ και θα λέμε ότι
$\log z = \log|z| + iArgz$
(ή καλύτερα θα γράφουμε Log) και θα ονομάζεται
κύριος κλάδος της λογαριθμικής συνάρτησης.

! Οι άλλοι κλάδοι θα είναι οι $\log : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ με
$\log_\kappa = Log + i2\kappa\pi,\ \kappa \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$

Ο κύριος κλάδος της λογαριθμικής συνάρτησης στο $\mathbb{C}^*$
αποτελεί επέκταση της $\log = \ln : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ αφού
$\forall z \in (0, +\infty)\ (\Leftrightarrow z = x + 0i,\ x > 0)\ Log z = Log(x + 0i) =$

$= \log|x + 0i| + i\underbrace{Arg(x + 0i)}_{=0} = \log|x| = \ln|x|$